



MATEMATIKA

Valstybinio brandos egzamino užduotis

Pagrindinė sesija

2013 m. birželio 5 d.

Trukmė – 3 val. (180 min.)

MATEMATIKOS FORMULĖS

Greitosios daugybos formulės: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$, $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

Aritmetinės progresijos pirmųjų n narių suma: $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$.

Geometrinė progresija: $b_n = b_1 q^{n-1}$; $S_n = \frac{b_1 - qb_n}{1-q} = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$.

Nykstamosios geometrinės progresijos narių suma: $S = \frac{b_1}{1-q}$.

Sudėtinių procentų formulė: $S_n = S \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$; čia S – pradinis dydis, p – palūkanų norma,

n – laikotarpių skaičius.

Trikampis: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$,

$S = \frac{1}{2} ab \sin C = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = rp = \frac{abc}{4R}$;

čia a, b, c – trikampio kraštinių ilgių, A, B, C – prieš jas esančių kampų didumai, p – pusperimetris, r ir R – įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų spindulių ilgių, S – plotas.

Skritulio išpjova: $S = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha$, $l = \frac{2\pi R}{360^\circ} \cdot \alpha$;

čia α – centrinio kampo didumas laipsniais, S – išpjovos plotas, l – išpjovos lanko ilgis, R – apskritimo spindulio ilgis.

Kūgis: $S_{\text{šon. pav.}} = \pi Rl$, $V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$.

Rutulys: $S = 4\pi R^2$, $V = \frac{4}{3} \pi R^3$.

Nupjautinis kūgis: $S_{\text{šon. pav.}} = \pi(R+r) \cdot l$, $V = \frac{1}{3} \pi H(R^2 + Rr + r^2)$;

čia R ir r – kūgio pagrindų spindulių ilgių, V – tūris, H – aukštinės ilgis, l – sudaromosios ilgis.

Nupjautinės piramidės tūris: $V = \frac{1}{3} H(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$;

čia S_1, S_2 – pagrindų plotai, H – aukštinės ilgis.

Rutulio nuopjova: $S = 2\pi RH$, $V = \frac{1}{3} \pi H^2(3R - H)$; čia R – rutulio spindulio ilgis, H – nuopjovos aukštinės ilgis.

Erdvės vektoriaus ilgis: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Vektorių skaliarinė sandauga: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$;

čia α – kampas tarp vektorių $\vec{a} \{x_1, y_1, z_1\}$ ir $\vec{b} \{x_2, y_2, z_2\}$.

Trigonometrinių funkcijų sąryšiai:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad 2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha, \quad 2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha,$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta, \quad \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}.$$

Trigonometrinių funkcijų reikšmių lentelė:

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

Trigonometrines lygtys:

$$\begin{cases} \sin x = a, \\ x = (-1)^k \arcsin a + \pi k; \end{cases} \quad \text{čia } k \in \mathbf{Z}, \quad -1 \leq a \leq 1;$$

$$\begin{cases} \cos x = a, \\ x = \pm \arccos a + 2\pi k; \end{cases} \quad \text{čia } k \in \mathbf{Z}, \quad -1 \leq a \leq 1;$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = a, \\ x = \operatorname{arctg} a + \pi k; \end{cases} \quad \text{čia } k \in \mathbf{Z}.$$

Išvestinių skaičiavimo taisyklės:

$$(cu)' = cu', \quad (u \pm v)' = u' \pm v', \quad (uv)' = u'v + uv', \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$

čia $u = u(x)$ ir $v = v(x)$ – diferencijuojamosios funkcijos, c – konstanta.

$$\text{Funkcijų išvestinės: } (a^x)' = a^x \ln a, \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a};$$

Sudėtinės funkcijos $h(x) = g(f(x))$ išvestinė $h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

Funkcijos grafiko liestinės taške $(x_0, f(x_0))$ lygtis: $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Pagrindinės logaritmų savybės: $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$, $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$,

$$\log_a x^k = k \cdot \log_a x, \quad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}.$$

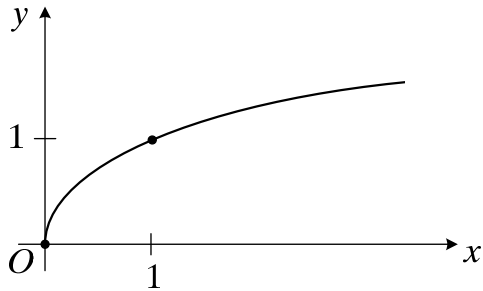
$$\text{Derinių skaičius: } C_n^k = C_n^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad \text{Gretinių skaičius: } A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Tikimybių teorija: atsitiktinio dydžio X matematinė viltis $EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$,
dispersija $DX = (x_1 - EX)^2 p_1 + (x_2 - EX)^2 p_2 + \dots + (x_n - EX)^2 p_n$.

I dalis

Kiekvienas šios dalies uždavinys (01–12) turi tik vieną teisingą atsakymą, vertinamą 1 tašku. Pasirinkite, jūsų nuomone, teisingą atsakymą ir pažymėkite jį atsakymų lape kryželiu ☒.

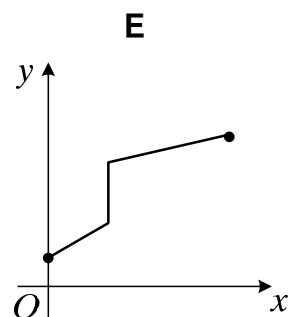
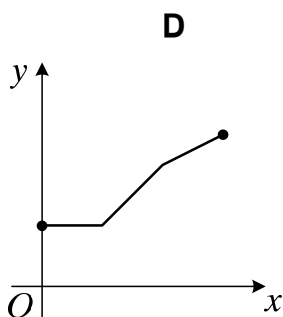
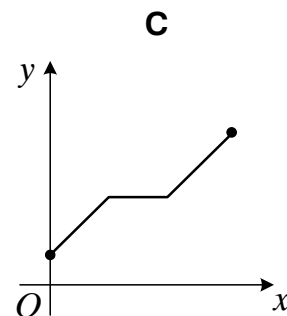
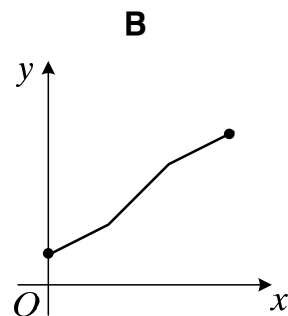
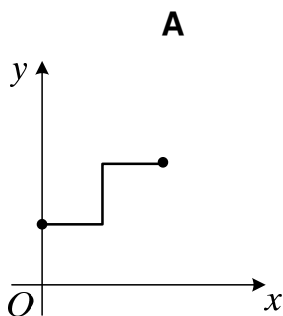
01. Kurios iš žemiau užrašytų funkcijų grafiko eskizas pavaizduotas paveiksle?



- A $y = \sqrt{x}$ B $y = \log_4 x$ C $y = 2^x$ D $y = x^3$ E $y = \frac{1}{x}$

Juodraštis

02. Kuriame paveiksle pavaizduota didėjančioji¹ funkcija?



Juodraštis

¹ didėjančioji – росная – возрастающая

(iki teisėtai atskleidžiant vokus, kuriuose yra valstybinio brandos egzamino užduoties ar jos dalies turinys)

131MAVUO

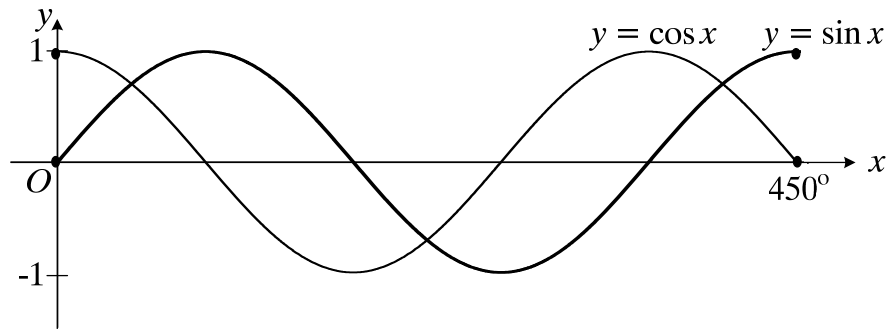
2013 M. MATEMATIKOS VALSTYBINIO BRANDOS EGZAMINO UŽDUOTIS

03. Yra 5 bandomieji sklypai. Kiekviename iš jų pasodinta po 100 pupų. Po nustatyto laiko sklypuose sudygo atitinkamai 72, 82, 86, 80 ir x pupų. Žinoma, kad sudygusių pupų skaičių moda, mediana ir vidurkis¹ sutampa. Raskite nežinomą pupų skaičių x .

- A 86 B 84 C 82 D 80 E 72

Juodraštis

04. Raskite lygties² $\sin x = \cos x$ sprendinių³ skaičių intervale $0^\circ \leq x \leq 450^\circ$, remdamiesi šiame intervale pavaizduotais funkcijų $y = \sin x$ ir $y = \cos x$ grafikais.



- A 2 B 3 C 5 D 7 E 8

Juodraštis

05. Kiek viršūnių yra piramidėje⁴, turinčioje 12 briaunų⁵?

- A 6 B 7 C 12 D 15 E 18

Juodraštis

¹ vidurkis – średnia – среднее

² lygties – równania – уравнения

³ sprendinių – rozwiązań – решений

⁴ piramidėje – w ostrosłupie – в пирамиде

⁵ briaunų – krawędzi – ребер

06. Seka¹ $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ yra aritmetinė progresija², kurios $a_5 + a_n = a_2 + a_{10}$. Raskite n .

A 5

B 6

C 7

D 8

E 9

Juodraštis

07. Visus iš eilės einančius natūraliuosius skaičius³ keliant kvadratu buvo gauta seka $1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2, \dots$. Skaičius 10^8 yra šios sekos narys. Kuris skaičius šioje sekoje eis iš karto po skaičiaus 10^8 ?

A $(10^8 + 1)^2$ B $(10^8)^2$ C $(10^5)^2$ D $(10^4 + 1)^2$ E $(10^4)^2 + 1$

Juodraštis

08. Išspręskite nelygybę⁴ $\log_{0,01} 100 < \log_{0,01} x$.

A $(-\infty; 100)$ B $(0; 0,01)$ C $(0,01; 100)$ D $(0; 100)$ E $(100; +\infty)$

Juodraštis

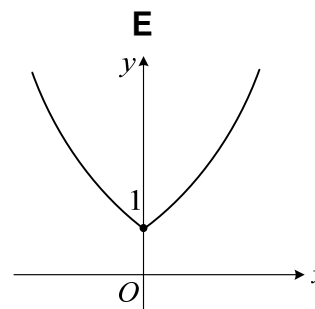
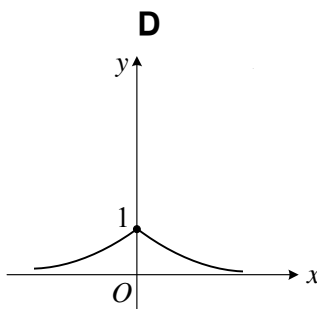
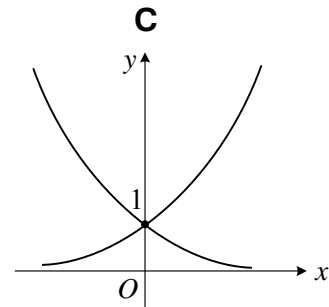
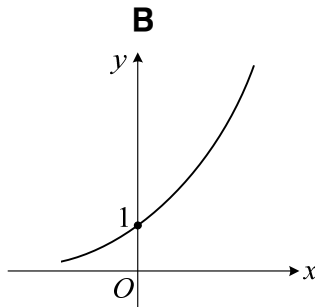
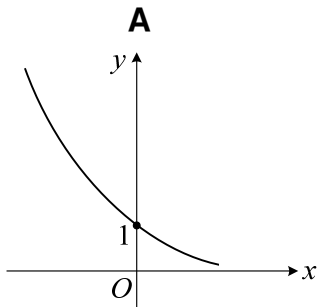
¹ seka – ciąg – последовательность

² aritmetinė progresija – postęp arytmetyczny – арифметическая прогрессия

³ natūraliuosius skaičius – liczby naturalne – натуральные числа

⁴ nelygybę – nierówność – неравенство

09. Funkcijos $y = 2^{|x|}$ grafiko eskizas yra:



Juodraštis

10. Kam lygu xyz , kai $x^2yz^3 = 7^3$ ir $xy^2 = 7^9$?

A 7^4

B 7^6

C 7^8

D 7^9

E 7^{10}

Juodraštis

11. Taškas $\left(2; \frac{4}{9}\right)$ priklauso funkcijos $f(x) = a^x$ grafikui. Kokia yra a skaitinė reikšmė¹?
- A 3 B $\frac{3}{2}$ C 1 D $\frac{2}{3}$ E $\frac{1}{3}$

Juodraštis

12. Funkcijos $f(x) = (x^{10} + 1)^{10}$ išvestinė² yra:

- A $10(x^{10} + 1)^9$ B $100(x^{10} + 1)^9$ C $100x^9(x^{10} + 1)^9$
- D $x^9(x^{10} + 1)^9$ E $100x(x^{10} + 1)^9$

Juodraštis

¹ skaitinė reikšmė – wartość liczbowa – числовое значение

² išvestinė – pochodna – производная

II dalis

Kiekvieno šios dalies uždavinio (13–24) teisingas atsakymas vertinamas **2 taškais** (kitu atveju vertinama 0 taškų). Išsprendę uždavinius, gautus atsakymus įrašykite į atsakymų lapą.

13. $f(x) = \sqrt{2} x^2 + \sqrt{2}$. Apskaičiuokite $f'(\sqrt{2})$.

Juodraštis

- 14.** Sausio 1 dieną pradėtame eksploatuoti smėlio karjere buvo 80 000 m³ smėlio. Kasmet planuojama iškasti 20 % praėjusių metų gale karjere likusio smėlio. Kiek kubinių metrų smėlio karjere turėtų likti po 3 metų?

Juodraštis

- 15.** Duoti trys natūralieji skaičiai a , b , c . Kiekvienas šių skaičių yra mažesnis už 11. Raskite didžiausią reiškinio¹ $\frac{a+b}{c}$ skaitinę reikšmę.

Juodraštis

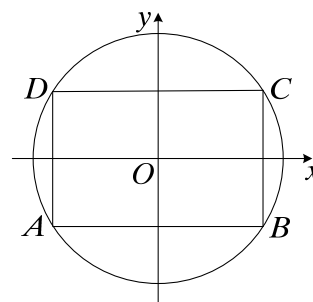
- 16.** Apskaičiuokite reiškinio $1000^{\frac{1}{\lg 4}}$ reikšmę.

Juodraštis

¹ reiškinio – wyrażenia – выражения

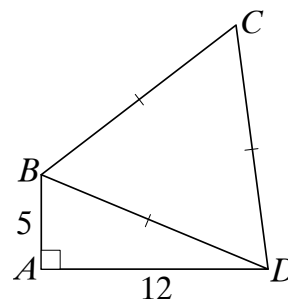
17. Į apskritimą¹ įbrėžtas stačiakampis² $ABCD$ taip, kad kraštinė³ AB lygiagreti Ox ašiai. $AB = 4$, $AD = 3$. Raskite taško D koordinatas.

Juodraštis



18. Keturkampio⁴ $ABCD$ kampas⁵ A yra status⁶. $AB = 5$, $AD = 12$, $BC = CD = BD$. Apskaičiuokite keturkampio $ABCD$ plotą⁷.

Juodraštis



¹ apskritimą – okrag – окружность

² stačiakampis – prostokāt – прямоугольник

³ kraštinė – bok – сторона

⁴ keturkampio – czworokąta – четырехугольника

⁵ kampas – kąt – угол

⁶ status – prosty – прямой

⁷ plotą – powierzchnię – площадь

19. Tikimybė¹, kad reikalinga knyga yra pirmos bibliotekos fonde, lygi 0,7, o kad ši knyga yra antros bibliotekos fonde, lygi 0,55. Apskaičiuokite tikimybę, kad knyga yra bent vienos bibliotekos fonde.

Juodraštis

20. Vektoriai $\vec{a} + 2\vec{b}$ ir $\vec{a} - 2\vec{b}$ statmeni, $|\vec{a}| = 5$. Raskite $|\vec{b}|$.

Juodraštis

¹ tikimybė – prawdopodobieństwo – вероятность

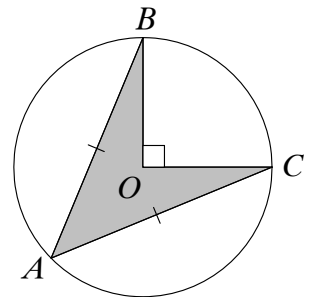
21. Apskaičiuokite

$$\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{1+\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{4}.$$

Juodraštis

22. Apskritimo su centru O spindulio ilgis lygus 1. $\angle BOC = 90^\circ$. Apskritimo stygos¹ AB ir AC yra lygios. Apskaičiuokite pilkosios dalies $ABOC$ plotą (žr. pav.).

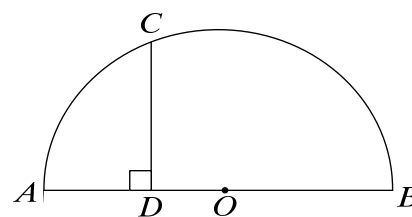
Juodraštis



¹ stygos – сіяціwy – хорды

23. Taškas C priklauso pusapskritimiui¹ su centru O . $CD \perp AB$,
 $AD = 4$, $DB = 9$. Apskaičiuokite atkarpos² CD ilgį³.

Juodraštis



24. Į 5 litrų talpos indą įpilta 2 litrai 15 % druskos tirpalo. Kiek litrų 20 % druskos tirpalo reikia įpilti į šį indą, kad druskos kiekis procentais gautame tirpale būtų didžiausias?

Juodraštis

¹ pusapskritimiui – pólókraėu – полуокружности

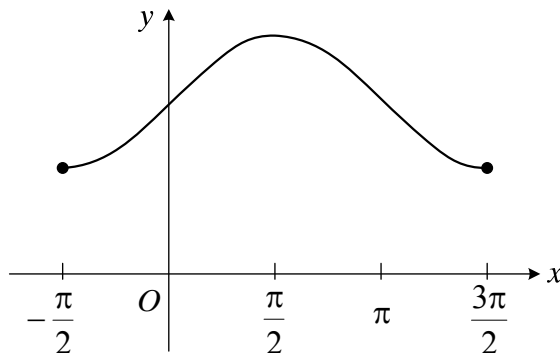
² atkarpos – odcinka – отрезка

³ ilgį – dľugosć – длину

III dalis

Išspręskite 25–31 uždavinius. Sprendimus bei atsakymus perrašykite į atsakymų lapą.

25. Paveiksle pavaizduotas funkcijos $y = \sin x + a$ grafikas intervale $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$; čia a – realusis skaičius. Funkcijos didžiausia reikšmė šiame intervale lygi 4, o mažiausia reikšmė lygi 2.



- 25.1. Raskite skaičių a .

(1 taškas)

Juodraštis

- 25.2. Per funkcijos grafiko tašką, kurio abscisė $x_0 = \pi$, nubrėžta liestinė¹. Kokio didumo kampą sudaro ši liestinė su teigiamąja ašies Ox kryptimi?

(2 taškai)

Juodraštis

- 25.3. Apskaičiuokite figūros, kurią riboja funkcijos $f(x) = \sin x + a$ grafikas ir tiesės² $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$, plotą.

(2 taškai)

Juodraštis

¹ liestinė – stycznа – касательная

² tiesės – proste – прямые

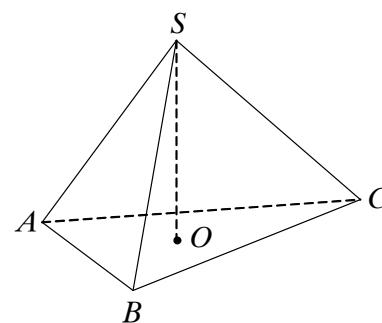
26. Raskite didžiausią sveikąjį lygties $\sqrt{x^2 - 4x + 12} = 3$ sprendinį.

(3 taškai)

Juodraštis

27. Taisyklingosios trikampės piramidės $ABCS$ tūris¹ lygus 8, piramidės aukštinė² SO yra $2\sqrt{3}$ ilgio. Apskaičiuokite piramidės pagrindo³ ABC aukštinės ilgį.

(3 taškai)



Juodraštis

¹ tūris – objętość – объем

² aukštinė – wysokość – высота

³ pagrindo – podstawy – основания

28. Iš skaitmenų¹ 0, 3, 5 sudaromi visi galimi triženkliai² skaičiai. Skaičiaus skaitmenys gali kartotis (pvz., 555, 300, 303, ...).

28.1. Kiek tokių triženklių skaičių galima sudaryti?

(1 taškas)

Juodraštis

28.2. Apskaičiuokite tikimybę, kad iš sudarytų skaičių atsitiktinai³ paimtas skaičius dalijasi iš 3.

(2 taškai)

Juodraštis

¹ skaitmenų – cyfr – цифр

² triženkliai – trzycyfrowe – трехзначные

³ atsitiktinai – losowo – случайно

29. Šeši darbuotojai gavo dovanų 6 bilietus į teatrą, keturiuose iš jų vietos buvo nurodytos pirmoje eilėje. Darbuotojai dalijasi bilietus atsitiktinai juos traukdami. Kokia tikimybė, kad dviejų iš pirmų trijų ištrauktų bilietų vietos bus pirmoje eilėje?

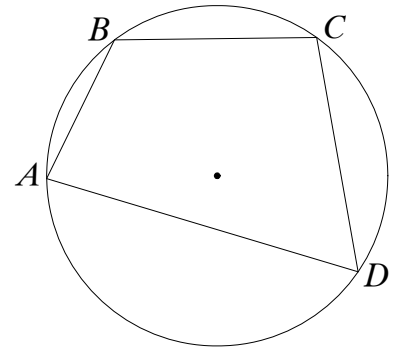
(3 taškai)

Juodraštis

30. Įbrėžtinio¹ keturkampio $ABCD$ kraštinių AB ir AD ilgių sandauga² lygi kraštinių CB ir CD ilgių sandaugai. Trikampio ABD plotas lygus 20. Apskaičiuokite trikampio BCD plotą.

(3 taškai)

Juodraštis

¹ įbrėžtinio – wpisanego – вписанного² sandauga – iloczyn – произведение

31. Trys dviratininkai kas valandą išvažiuoja iš tos pačios vietos ir važiuoja viena kryptimi. Pirmojo dviratininko greitis 12 km/h, antrojo – 10 km/h. Trečiasis dviratininkas, važiuodamas greičiau nei pirmasis, pirmiausia pavijo antrąjį, o praėjus dar 2 valandoms – pirmąjį dviratininką. Koks trečiojo dviratininko greitis?

(4 taškai)

Juodraštis

