



# MATEMATIKOS

## 2006 m. valstybinio brandos egzamino užduotis

Pagrindinė sesija

2006 m. gegužės 17 d.

Trukmė – 3 val.

### Valstybinio brandos egzamino formulės

**Trikampis.**  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = rp = \frac{abc}{4R}$ ; čia  $a, b, c$  – trikampio kraštinės,  $p$  – pusperimetris,  $r$  ir  $R$  – įbrėžtinio ir apibrėžtinio apskritimų spinduliai,  $S$  – trikampio plotas.

**Iškilojo daugiakampio kampų suma.**  $S_n = 180^\circ(n-2)$ .

**Skritulio išpjova.**  $S = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot \alpha$ ,  $l = \frac{2\pi R}{360^\circ} \cdot \alpha$ ; čia  $\alpha$  – centrinio kampo didumas laipsniais,  $S$  – išpjovos plotas,  $l$  – išpjovos lanko ilgis,  $R$  – apskritimo spindulys.

**Nupjautinis kūgis.**  $S = \pi(R+r) \cdot l$ ,  $V = \frac{1}{3}\pi H(R^2 + Rr + r^2)$ ; čia  $R$  ir  $r$  – kūgio pagrindų spinduliai,  $S$  – šoninio paviršiaus plotas,  $V$  – tūris,  $H$  – aukštinė,  $l$  – sudaromoji.

**Nupjautinės piramidės tūris.**  $V = \frac{1}{3}H(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$ ; čia  $S_1, S_2$  – pagrindų plotai,  $H$  – aukštinė.

**Rutulys.**  $S = 4\pi R^2$ ,  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ ; čia  $S$  – rutulio paviršiaus plotas,  $V$  – tūris,  $R$  – spindulys.

**Rutulio nuopjovos tūris.**  $V = \frac{1}{3}\pi H^2(3R - H)$ ; čia  $R$  – spindulys,  $H$  – nuopjovos aukštinė.

**Vektorių skaliarinė sandauga.**  $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$ ;  
čia  $\alpha$  – kampas tarp vektorių  $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$  ir  $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ .

**Geometrinė progresija.**  $b_n = b_1 q^{n-1}$ ,  $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ .

**Begalinė nykstamoji geometrinė progresija.**  $S = \frac{b_1}{1-q}$ .

**Trigonometrinių funkcijų.**  $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ ,  $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ ,  $2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$ ,

$2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$ ,  $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$ ,  $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$ ,

$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}$ ,  $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ ,

$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ ,  $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$ .

**Niutono binomo formulė.**  $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n b^n$ .

$C_n^k = C_n^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ,  $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ .

**Tikimybių teorija.** Atsitiktinio dydžio  $X$  matematinė viltis yra  $EX = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$ ,  
dispersija  $DX = (x_1 - EX)^2 p_1 + (x_2 - EX)^2 p_2 + \dots + (x_n - EX)^2 p_n$ .

**Išvestinių skaičiavimo taisyklės.**  $(Cu)' = Cu'$ ;  $(u \pm v)' = u' \pm v'$ ;  $(uv)' = u'v + uv'$ ;  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ ;

čia  $u$  ir  $v$  – taške diferencijuojamos funkcijos,  $C$  – konstanta.  $(a^x)' = a^x \ln a$ ,  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ .

Sudėtinės funkcijos  $h(x) = g(f(x))$  išvestinė  $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$ .

**Funkcijos grafiko liestinės taške**  $(x_0; f(x_0))$  **lygtis.**  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ .

**Logaritmo pagrindo keitimo formulė.**  $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ .

Kiekvienas teisingai išspręstas uždavinys (1–6) vertinamas 1 tašku.

1. Kuriam intervalui priklauso skaičius<sup>1</sup>  $\log_3 10$ ?

- A**  $(-3; -2)$       **B**  $(0; 1)$       **C**  $(1; 2)$       **D**  $(3; 4)$       **E**  $(2; 3)$

2. Knygas dedant į krūveles po 3, lieka 2 knygos, taip pat 2 knygos lieka ir dedant jas į krūveles po 10. Knygų buvo:

- A** 12      **B** 8      **C** 32      **D** 16      **E** 24

3. Kuri pora lygčių<sup>2</sup> yra ekvivalenčios lygtys?

- A**  $\frac{x^2-4}{x-2} = 4$  ir  $x+2 = 4$       **B**  $x-1 = 3$  ir  $(x-1)^2 = 9$   
**C**  $x = 3$  ir  $x + \frac{1}{x-3} = 3 + \frac{1}{x-3}$       **D**  $x+1 = 1$  ir  $x+1 + \frac{1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$   
**E**  $\sqrt{x^2} = 1$  ir  $x = 1$

4.  $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2} - \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} =$

- A** -1      **B**  $5-2\sqrt{5}$       **C**  $2\sqrt{5}-5$       **D** 1      **E** 5

5. Kurios parabolės viršūnė yra II ketvirtyje?

- A**  $y = (x-1)^2 - 1$       **B**  $y = (x+2)^2 + 1$       **C**  $y = (x+2)^2 - 3$   
**D**  $y = (x-4)^2$       **E**  $y = x^2 - 1$

6. Kiek sprendinių intervale  $\left[-\frac{5\pi}{2}; 2\pi\right]$  turi lygtis  $\cos x = \frac{1}{2}$ ?

- A** 3      **B** 4      **C** 7      **D** 5      **E** 6

<sup>1</sup> skaičius – число – liczba

<sup>2</sup> lygtis – уравнение – równanie

## JUODRAŠTIS

7. Palyginkite  $\log_{\frac{1}{a}} a$  ir  $\log_a \frac{1}{a}$ , kai  $a > 1$ .

(2 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III

8. Priekinio dviračio rato apskritimo<sup>1</sup> ilgis 120 cm, galinio rato – 122 cm. Kokį atstumą<sup>2</sup> (metrais) nuvažiavus dviračiu, jo priekinis ratas apsisuks vienu apsisukimu daugiau negu galinis?

(2 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III

9. Su kuriomis  $a$  ( $a \neq 0$ ) reikšmėmis<sup>3</sup> funkcijų  $y = ax^2 + 6x + 3$  ir  $y = 2x - a$  grafikai neturi bendrų taškų?

(3 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III

<sup>1</sup> apskritimas – окружность – okrag  
<sup>2</sup> atstumas – расстояние – odległość  
<sup>3</sup> reikšmė – значение – wartość

10. Draudžiant būstą metams 80 000 Lt draudimo suma nuo stichinės nelaimės, reikia mokėti 64 Lt, o draudžiant ta pačia suma nuo vagystės – 160 Lt. Draudžiant būstą 80 000 Lt suma nuo stichinės nelaimės ir nuo vagystės kartu, taikoma 25 procentų nuolaida. Kiek procentų draudimo sumos reikia mokėti draudžiant nuo abiejų rizikų kartu?

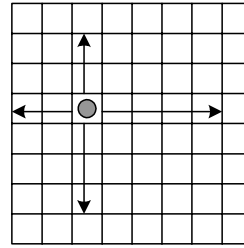
(3 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III
_____	_____	_____

---

**JUODRAŠTIS**

11. Paveiksle pavaizduotos šachmatų lentos viename iš langelių padėta šachmatų figūra – bokštas<sup>1</sup> ir parodytos šios figūros galimos judėjimo kryptys (bokštas gali judėti nurodytomis kryptimis ir užimti bet kurį langelį kiekviena nurodyta kryptimi). Keliais skirtingais būdais šachmatų lentoje galima taip padėti du bokštus, kad jie vienas kitą galėtų nukirsti (du bokštai kerta vienas kitą, kai jie gali užimti vienas kito langelį).



(3 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III

---

## JUODRAŠTIS

<sup>1</sup> bokštas – ладья – wieża

12. Išspręskite nelygybę<sup>1</sup>

$$\frac{x^2 + x - 6}{4 - x} \leq 0.$$

(3 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III

---

**JUODRAŠTIS**

<sup>1</sup> nelygybė – неравенство – nierówność



13. Išspręskite lygtį<sup>1</sup>

$$\frac{1}{8}(3^{x+1} - 3^{x-1}) = 0, (3).$$

(3 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III

---

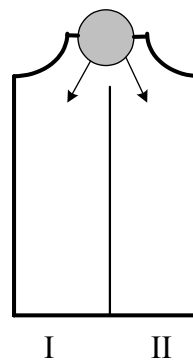
**JUODRAŠTIS**

---

<sup>1</sup> lygtis – уравнение – równanie

14. Į žaidimo urną mestas rutuliukas su vienodomis tikimybėmis<sup>1</sup> gali įkristi į bet kurią iš dviejų urnos sekcijų – į pirmąją arba į antrąją (žr. pav.). Į šią urną įmesti trys rutuliukai. Sakykime,  $X$  – rutuliukų skaičius pirmojoje sekcijoje. Parašykite atsitiktinio dydžio  $X$  skirstinį<sup>2</sup>.

(3 taškai)



Čia rašo vertintojai

I	II	III
_____	_____	_____

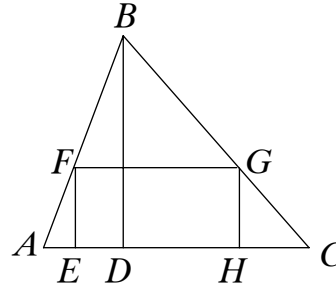
---

## JUODRAŠTIS

<sup>1</sup> tikimybė – вероятность – prawdopodobieństwo

<sup>2</sup> atsitiktinio dydžio skirstinys – распределение случайной величины – rozkład zmiennej losowej

15. Į trikampį<sup>1</sup>  $ABC$ , kurio pagrindo kraštinės<sup>2</sup>  $AC$  ilgis 10 cm, o aukštinės  $BD$  ilgis 8 cm, įbrėžtas stačiakampis<sup>3</sup>  $EFGH$  (žr. pav.). Šio stačiakampio dvi viršūnės yra trikampio pagrindo kraštinėje, o kitos dvi – kitose trikampio kraštinėse.



1. Sakykime,  $EF$  ilgis  $x$  cm. Įrodykite, kad stačiakampio  $EFGH$  plotas yra

$$S = \frac{5}{4}(8x - x^2).$$

(2 taškai)

2. Kokio didžiausio ploto<sup>4</sup> stačiakampį galima įbrėžti į trikampį  $ABC$ ?

(3 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III
—	—	—
—	—	—

<b>Taškų suma</b>			
-------------------	--	--	--

## JUODRAŠTIS

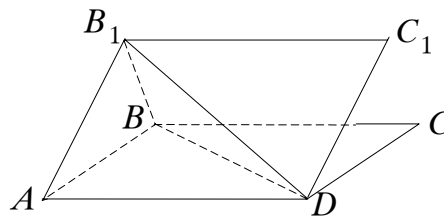
<sup>1</sup> trikampis – треугольник – trójkat

<sup>2</sup> kraštinė – сторона – bok, ramię

<sup>3</sup> stačiakampis – прямоугольник – prostokat

<sup>4</sup> plotas – площадь – pole

16. Du lygūs kvadratai  $ABCD$  ir  $AB_1C_1D$  turi bendrą kraštinę  $AD$ , o jų plokštumos<sup>1</sup> sudaro  $60^\circ$  didumo dvisienį kampa<sup>2</sup>. Iš bendros viršūnės  $D$  kiekviename kvadrato nubrėžtos įstrižainės<sup>3</sup>  $DB$  ir  $DB_1$  (žr. pav.). Raskite kampo tarp šių įstrižainių kosinusa.



(4 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III
_____	_____	_____

---

## JUODRAŠTIS

<sup>1</sup> plokštuma – плоскость – płaszczyzna

<sup>2</sup> dvisienis kampas – двугранный угол – kąt dwuścienny

<sup>3</sup> įstrižainė – диагональ – przekątna

17. Paveiksle pavaizduoti funkcijų  $y = -x^2 + 1$  ir  $y = -2x^2 + 2$  grafikai.

1. Raskite taškų  $A$  ir  $C$  koordinates.

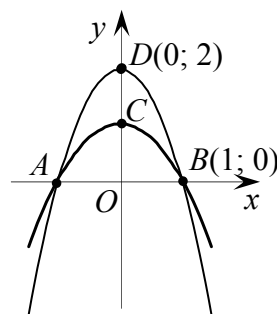
(1 taškas)

2. Įrodykite, kad kreivinės figūros  $ACBOA$  plotas lygus  $\frac{4}{3}$ .

(2 taškai)

3. Apskaičiuokite kreivinės figūros  $AADBCA$  plotą.

(2 taškai)



Čia rašo vertintojai

I II III

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

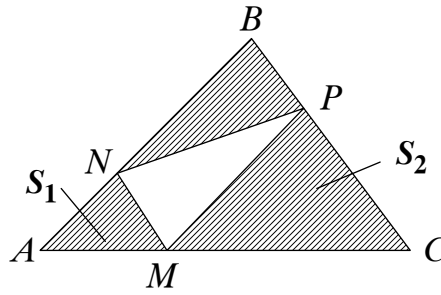
\_\_\_\_\_

**Taškų suma**

\_\_\_\_\_

**JUODRAŠTIS**

18. Per trikampio  $ABC$  kraštinės  $AC$  tašką  $M$  išvesta atkarpa<sup>1</sup>  $MN$ , lygiagreti su  $BC$ , ir atkarpa  $MP$ , lygiagreti su  $AB$ . Taškai  $N$  ir  $P$  sujungti atkarpa  $NP$  (žr. pav.).



1. Trikampiai  $MPC$  ir  $ABC$  yra panašūs. Jų panašumo koeficientas  $k$ . Įrodykite, kad  $\frac{S_{ABC}}{S_{MPC}} = k^2$ .

(2 taškai)

2. Trikampių  $ANM$  ir  $MPC$  plotai yra  $S_1$  ir  $S_2$ .

a) Įrodykite, kad trikampio  $ABC$  plotas  $S$  gali būti išreikštas plotais  $S_1$  ir  $S_2$  šitaip:  $S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$

(2 taškai)

b) Apskaičiuokite trikampio  $NBP$  plotą, kai  $S_1 = 4 \text{ cm}^2$ ,  $S_2 = 9 \text{ cm}^2$ .

(2 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III
—	—	—
—	—	—
—	—	—
<b>Taškų suma</b>		

**JUODRAŠTIS**

<sup>1</sup> atkarpa – отрезок – odcinek

19. Ar skaičiai 1, 7 ir 18 gali būti kurios nors didėjančios geometrinės progresijos<sup>1</sup> nariai (nebūtinai gretimi). Atsakymą pagrįskite.

(4 taškai)

Čia rašo vertintojai		
I	II	III

---

## JUODRAŠTIS

<sup>1</sup> geometrinė progresija – геометрическая прогрессия – postęp geometryczny